

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园

首页

新随笔

联系

订阅 

管理

<

2022年3月

>

日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力

欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的

园龄：4年7个月

粉丝：288

关注：5

+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔

我的评论

我的参与

最新评论

我的标签

积分与排名

积分 - 457097

排名 - 1198

单变量微积分笔记18——定积分的应用3（均值、权重、概率）

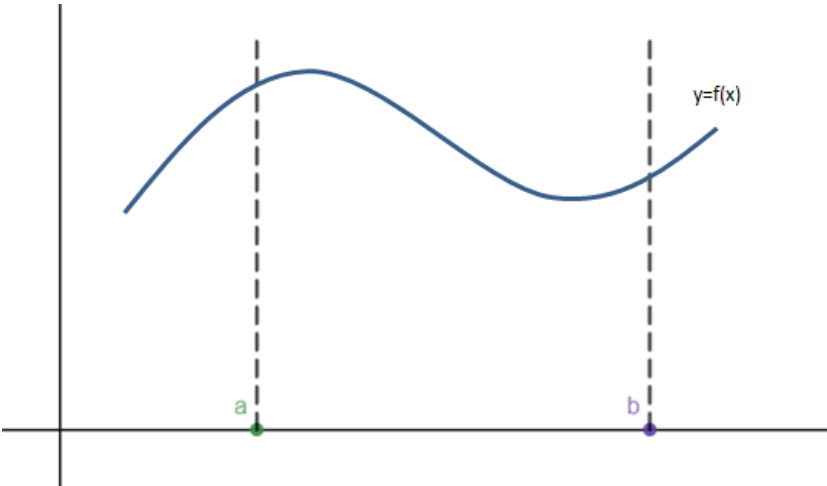
均值

均值与定积分的关系

在[数学笔记14——微积分第一基本定理](#)中曾介绍过定积分与均值关系，如果 $y = f(x)$ ，则当 $n \rightarrow \infty$ 时：

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

用定积分的几何意义解释这个等式，如下图所示：



如果 $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n = b$ ，我们得到 $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2) \dots y_n = f(x_n)$. $\Delta x = (b-a)/n$ ，那么当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时，面积就是：

$$\Delta x \sum_{i=1}^n y_i = \int_a^b f(x) dx$$

进一步，两边同时除以 $b-a$ ，相当于得到每个小矩形的面积：

$$\frac{\Delta x}{b-a} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

结合本节最开始的公式：

$$\frac{\Delta x}{b-a} = \frac{1}{n}$$

所以 $\Delta x \rightarrow 0$ 等同于 $n \rightarrow \infty$

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析（一）(29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

- 1. 隐马尔可夫模型（一）(8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

- 1. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集（二）——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型（一）(5)

最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2（点积）
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫大人

现在看来均值和积分有着密切关系，将定积分除以积分的区间长度就是均值。

常数的均值

我们知道常数的均值就是常数本身，现在用积分去解释，得到：

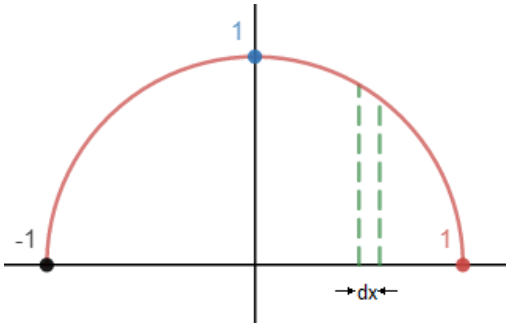
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b Cdx = \frac{C}{b-a}\Big|_a^b = C$$

所以Avg(C) = C，积分更好地解释了均值这个概念。

示例

计算点在单位半圆上的点平均高度

用定积分去解释，小矩形的宽度是dx，高度就是y，如下图所示：



单位圆的曲线是 $x^2 + y^2 = 1$ ，由此便可计算均值：

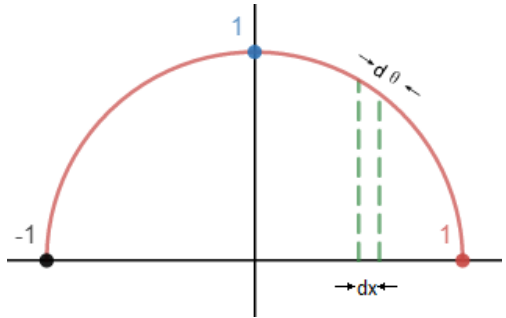
$$\frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^1 ydx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4}$$

我们可以直接求得半圆的面积而不必费力计算定积分。所以点的平均高度是 $\pi/4$ ，附带的结论是， $\pi/2$ 的几何意义是单位半圆的面积，用积分解释就是 $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx$

均值的不同答案

均值的一个重要特征：对谁计算均值？对于不同的变量，将会得到不同的答案。

还是计算点在单位半圆上的点平均高度，这次我们使用弧长来计算，如下图所示：



设弧长为 θ ， $d\theta$ 是半圆的 $1/n$ ， $d\theta$ 在x轴的投影是dx，然而dx并不是直径的 $1/n$ ——在(0,1)点，dx和 $d\theta$ 接近；越靠近(1,0)点， $d\theta$ 对应的dx越短。

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At) 有些图片挂了呢

--ccchendada

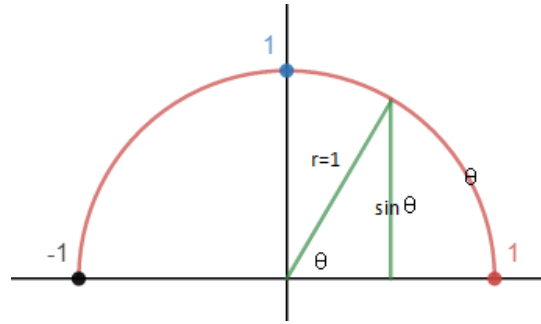
5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中

$v = \{2gh\}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

在单位圆中，弧长等于半径夹角，半径上点的高度就是 $y = \sin\theta$ ，如下图所示：



已知上图 θ 的取值范围是 $[0, \pi]$ ，则对于弧长，半径上点的均值是：

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = \frac{1}{\pi} (-\cos\theta) \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} < \frac{\pi}{4}$$

看来今后在说均值时还需要加上前提条件，说明就什么而言计算的均值。

权重

权重与加权平均

在实际应用中，数值往往带有权重，这就要求计算均值时将权重也考虑进去。

对于 $f(x)$ ，如果每个 x 对应的权重是 $w(x)$ ，均值公式就变成了：

$$Avg(x) = \frac{\int_a^b f(x)w(x)dx}{\int_a^b w(x)dx}$$

根据该公式，常数的均值依然是常数：

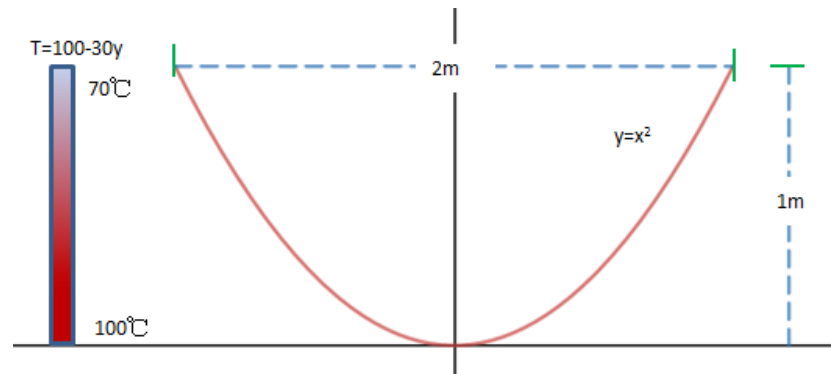
$$Avg(C) = \frac{\int_a^b Cw(x)dx}{\int_a^b w(x)dx} = C$$

从一个实际例子中能更好地解释公式：如果我分别以10元，20元，30元的价格买过同一支股票，平均购买的价格是多少？

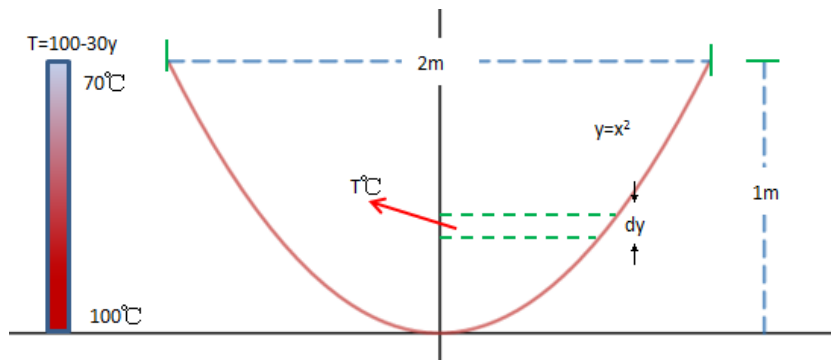
直接用 $(10 + 20 + 30)/3$ 计算是不对的，想要求得平均价格，还必须知道每次购入了多少股。现在设每次购入 w_1, w_2, w_3 股，那么均值就是： $(10w_1 + 20w_2 + 30w_3)/(w_1 + w_2 + w_3)$ ，这是对离散值的处理，对于连续值就可以使用定积分的加权平均值公式。

示例

如下图所示，有一个由 $y = x^2$ 旋转而成的坩埚，高度是1m，口宽2m。锅中盛满水后热一段时间后，锅底温度是 100°C ，水面温度是 70°C ，现假设温度的函数是 $T = 100 - 30y$ ，那么此时整锅水的能量是多少？
能量 = 体积 × 温度



由于锅是圆弧形，越往上装的水越多，对整体结果的影响就越大，这实际上是将容积看成对于温度的权重。可以使用圆盘法求解该问题，这样每个圆盘切片对应的温度就是一个定值，如下图所示：



圆盘的体积是 $\pi x^2 dy$ ，能量是 $T\pi x^2 dy$ ，这样整体的能量就是：

$$\begin{aligned} \int_0^1 T\pi x^2 dy &= \int_0^1 (100 - 30y)\pi y dy \\ &= \pi \int_0^1 (100y - 30y^2) dy \\ &= \pi(50y^2 - 10y^3)|_0^1 \\ &= 40\pi(^{\circ}\text{C}/\text{m}^3) \end{aligned}$$

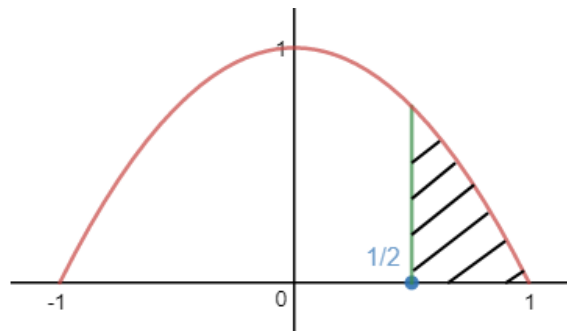
还可以根据总能量除以容积求出平均温度：

$$\text{Avg}(T) = \frac{\int_0^1 T\pi x^2 dy}{\int_0^1 \pi x^2 dy} = 80(^{\circ}\text{C})$$

概率

用定积分解释概率

如下图所示，曲线与x轴所围图形中的一个随机点，落在 $x > 1/2$ 处的概率？



概率问题就是面积问题，因此：

$$P\left(x > \frac{1}{2}\right) = \frac{\int_{1/2}^1 (1-x^2) dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2) dx} = \frac{5}{18}$$

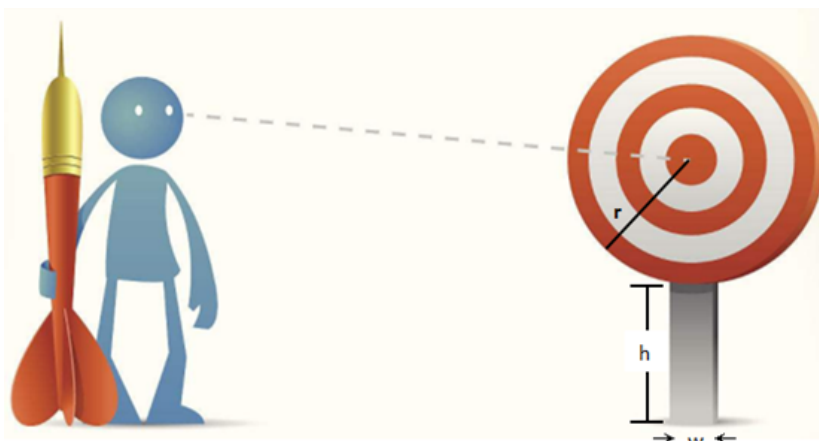
用微积分解释概率的一般公式：

$$P(a \leq x_1 < x < x_2 \leq b) = \frac{S_{part}}{S_{whole}} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} w(x) dx}{\int_a^b w(x) dx}$$

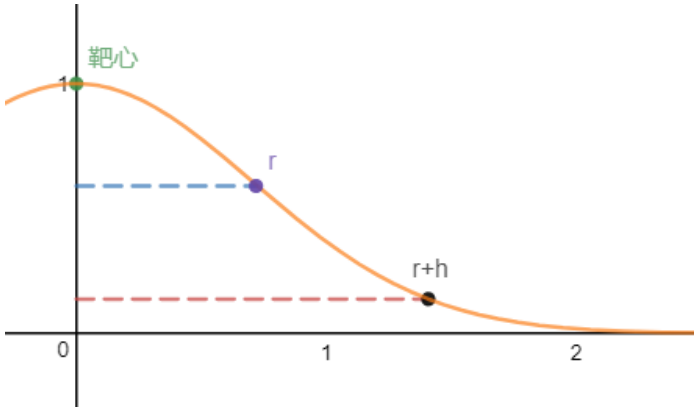
其中 $w(x)$ 是事件 x 的权重，在上例中， $w(x) = 1 - x^2$

示例

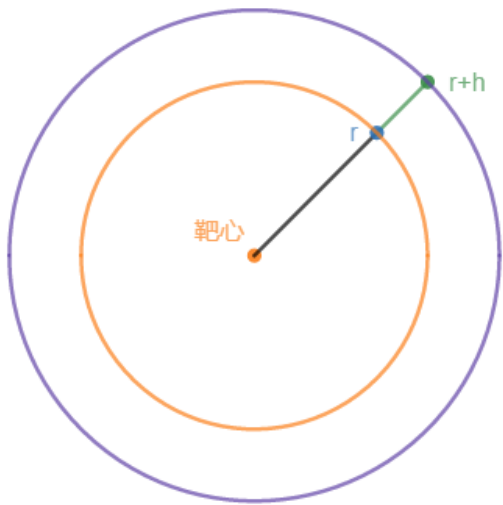
我最近在练习投掷飞镖，并且技术不错。现在我用一个带立柱的靶练习，每次都站在固定的位置联系。假设我的命中次数与靶心距离呈正态分布，靶子的半径是 r 米，立柱的高度是 h 米，宽度是 w 米，那么我命中立柱的概率是多少？命中次数与半径的关系： $hits = e^{-x^2}$



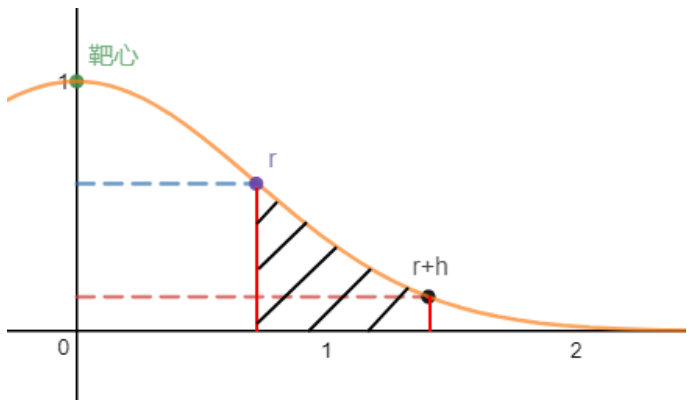
这是典型的加权概率问题，权重就是正态分布函数：



现在将立柱绕靶子外檐环绕一周，形成一个圆环，我们需要做的首先是计算出圆环的命中率，然后用立柱的面积除以圆环的面积就能得出最终结果：



现在我们知道命中上图中绿线次数（圆环宽度）是呈正态分布的，命中的次数就是曲线在r和r+h点与x轴围成的面积：



现在需要将“线”扩展为“面”，实际上是等同于将“线”旋转一周，等同于将上图阴影部分绕y轴旋转一周，于是根据壳层法，圆环的命中次数：

$$\text{his}_{\text{环}} = \int_r^{r+h} 2\pi x e^{-x^2} dx = -\pi e^{-x^2} \Big|_r^{r+h}$$

$$P_{\text{环}} = P(r < x < r+h) = \frac{\text{part}}{\text{whole}} = \frac{\text{his}_{\text{环}}}{\text{his}_{\text{whole}}}$$

$$\text{his}_{\text{whole}} = \int_0^{+\infty} 2\pi x e^{-x^2} dx = -\pi e^{-x^2} \Big|_0^{+\infty}$$

$$P_{\text{环}} = \frac{\text{his}_{\text{环}}}{\text{his}_{\text{whole}}} = \frac{-\pi e^{-x^2} \Big|_r^{r+h}}{-\pi e^{-x^2} \Big|_0^{+\infty}} = \frac{e^{-x^2} \Big|_r^{r+h}}{e^{-\infty^2} - 1} = -e^{-x^2} \Big|_r^{r+h}$$

$$P_{\text{柱}} = P_{\text{环}} \times \frac{C_{\text{柱}}}{C_{\text{环}}} = P_{\text{环}} \times \frac{2\pi r}{w}$$

综合示例

示例1

假设一个人的速度关于时间的函数是 $v(t) = \frac{1500}{100+(t-5)^2} - 7$ ，单位是 m/s。这个人从 $t = 0$ 时刻开始跑步，加速5s，减速5s，他在这10s内的平均速度？

10秒内前进的距离：

$$s = \int_0^{10} v(t) dt = \int_0^{10} \left(\frac{1500}{100+(t-5)^2} - 7 \right) dt$$

根据积分表：

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$$

$$s = \int_0^{10} \left(\frac{15}{1+\left(\frac{t-5}{10}\right)^2} - 7 \right) dt = \left(150 \arctan \left(\frac{t-5}{10} \right) - 7t \right) \Big|_0^{10}$$

平均速度：

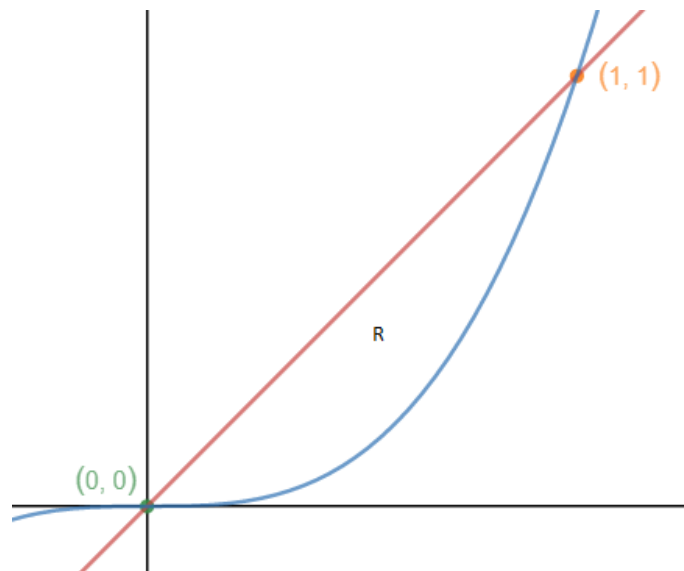
$$v = s/t = s/10 = 30 \arctan \left(\frac{1}{2} \right) - 7 \approx 6.9 \text{ m/s}$$

示例2

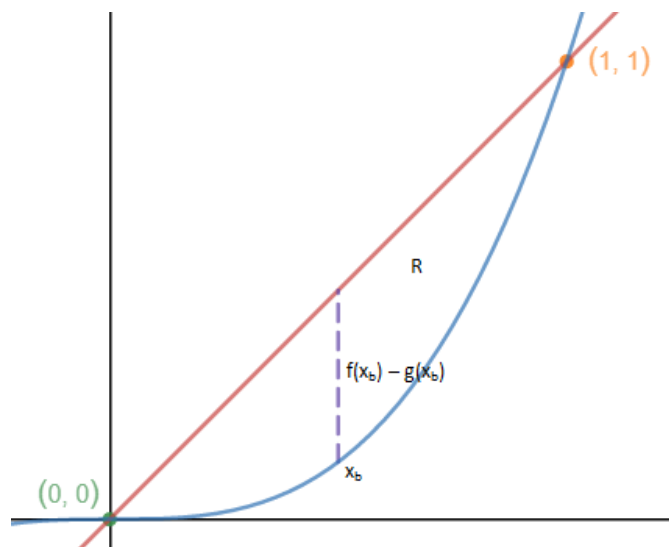
曲线 $f(x) = x$ 和 $g(x) = x^3$ 在第一象限相交的区域为 R 。

a) 在 R 区域， x 的均值是多少？

b) 如果在 R 上随机取一点，该点上 $x > 1/2$ 的几率是多少？



问题a可转换为加权问题，如下图所示：



在虚线上， x 值的总量是 $\text{sum}(x) = x_b (f(x_b) - g(x_b))$ ，均值是 x_b ， x 的权重就是 $w(x) = f(x) - g(x)$ 。根据加权平均公式：

$$\text{Avg}(x) = \frac{\int_b^a f(x)w(x)dx}{\int_b^a w(x)dx} = \frac{\int_0^1 x(x - x^3)dx}{\int_0^1 (x - x^3)dx} = \frac{x^3/3 - x^5/5}{x^2/2 - x^4/4} \Big|_0^1 = \frac{8}{15}$$

问题b较为简单，就是计算 $x > 1/2$ 时 R 的面积与总面积的比值：

$$P\left(\frac{1}{2} < x\right) = \frac{\int_{1/2}^1 (x - x^3)dx}{\int_{1/2}^1 (x - x^3)dx} = \frac{9}{16}$$

总结

1.现在看来均值和积分有着密切关系，将定积分除以积分的区间长度就是均值。

2.对于不同的变量计算均值，将会得到不同的答案。

3.对于加权平均值：

$$\text{Avg}(x) = \frac{\int_a^b f(x)w(x)dx}{\int_a^b w(x)dx}$$

4.概率的一般公式：

$$P(a \leq x_1 < x < x_2 \leq b) = \frac{S_{part}}{S_{whole}} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} w(x)dx}{\int_a^b w(x)dx}$$

出处：微信公众号 "我是8位的"

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注作者公众号 "我是8位的"



随笔

分类: [单变量微积分](#)

标签: [定积分的应用](#), [均值](#), [加权平均](#)

好文要顶

关注我

收藏该文



我是8位的

关注 - 5

粉丝 - 288

+加关注

0

推荐

0

反对

« 上一篇: [同桌的你](#)
» 下一篇: [单变量微积分笔记19——数值积分](#)

posted on 2017-11-09 21:32 我是8位的 阅读(5288) 评论(0) 编辑 收藏 举报

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

登录后才能查看或发表评论，立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) 博客园首页

- 【推荐】华为 HWD 2022 故事征集，分享最打动你的科技女性故事
- 【推荐】华为开发者专区，与开发者一起构建万物互联的智能世界

广告

JAVA Office文档在线编辑APIs

简单易用的Word, Excel, PowerPoint在线编辑接口

cloud.e-iceblue.cn

打开

编辑推荐：

- 革命性创新，动画杀手铜 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]：内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的？
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

**最新新闻：**

- 乔布斯的创业搭档：他缺乏工程师才能，不得不锻炼营销能力来弥补
 - 美国大厂码农薪资曝光：年薪18万美元，够养家，不够买海景房
 - 两张照片就能转视频！Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推“杀手级”功能，可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:

博客园

Copyright © 2022 我是8位的

Powered by .NET 6 on Kubernetes